جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم — **دترمینان، بردار و مقدار ویژه، قطری سازی** — تاریخ تحویل:

---

۱. (آ) می‌دانیم برای هر یک از A_i ها، یک ماتریس جایگشتی به شکل P_i وجود دارد که می‌توان P_iA_i را با عملیات‌های ستونی، بالا مثلثی کرد و عملیات ستونی دترمینان را عوض نمی‌کند. هم‌چنین می‌دانیم که دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی، برابر است با ضرب عناصر روی قطر اصلی. حال ابتدا ماتریس زیر را درست می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & P_2A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_mA_m \end{bmatrix} = A' \tag{1}$$

حال می‌توان ماتریس A' را بالا مثلثی کرد. پس می‌توان نتیجه گرفت که دترمینان A' ، برابر است با ضرب عناصر روی قطر اصلی هر بلوک. دقت کنیم ماتریسی که از سمت جپ ضرب کردیم دترمینانش ۱ نبوده است و دترمینانش برابر است با

$$det(P_1)det(P_2)...det(P_n)$$

پس با استفاده از رابطه‌ی دترمینان ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$det(P_1)det(P_2)...det(P_n)*det(A) = det(A') = det(P_1A_1)det(P_2A_2)...det(P_nA_n)$$

$$= det(P_1)det(A_1)det(P_2)det(A_2)...det(P_n)det(A_n)$$

پس :

$$det(A) = det(A_1)det(A_2)...det(A_n)$$

(ب) ابتدا با عملیات‌های سطری، ستون دوم را از ستون اول کم می‌کنیم و به ماتریس زیر می‌رسیم.

$$\begin{bmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{bmatrix} \tag{2}$$

سپس با با عملیات سطری، سطر دوم را با سطر اول جمع می‌زنیم و به ماتریس زیر می‌رسیم.

$$\begin{bmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{bmatrix} \tag{3}$$

و این جا از قسمت الف استفاده می‌کنیم و حکم ثابت می‌شود. دقت کنید که عملیات‌های سطری و ستونی ما بلوکی بودند ولی باید نشان دهید که این عملیات‌ها، مانند حالت عادی، دترمینان را تغییر نمی‌دهند.

(ج)

$$\begin{bmatrix} I & ۰ \\ -CA^{-۱} & I \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ ۰ & D - CA^{-۱}B \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

حال، از رابطه‌ی ضرب دترمینان‌ها استفاده می‌کنیم و برای محاسبه‌ی دترمینان هر ماتریس نیز از بخش الف استفاده می‌کنیم.

(د) کافی است که جای D بگذاریم $-I_۱$ و ماتریس را همان‌گونه بسازیم. سپس یک بار به روش بالا عمل کنیم. یک بار هم به روش زیر :

$$\begin{bmatrix} I & -B \\ ۰ & I \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BC & ۰ \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

و با روش مشابه، برابری را نتیجه بگیریم.

(ه) پاسخ. کافی است که A را یک ماتریس قطری با درایه‌های λ_i در نظر بگیریم و تمام درایه‌های بردارهای B و C برابر یک باشد و از رابطه‌ی قسمت قبل استفاده کنیم.

۲. (آ) اگر v یک بردار ویژه باشد:

$$Av = \lambda v$$

حال $< Av, Av >$ را بدست می‌آوریم:

$$(Av)^T Av = \lambda v^T \lambda v \Rightarrow v^T A^T Av = \lambda^۲ v^T v$$

چون A متعامد نرمال است می‌دانیم که $A^T A = I$. پس :

$$v^T A^T Av = v^T Iv = v^T v = \lambda^۲ v^T v \Rightarrow \lambda^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow |\lambda| = ۱$$

(ب) می‌دانیم چون این ماتریس‌ها متعامد و نرمال هستند داریم :

$$AA^T = A^T A = BB^T = B^T B = I_n$$

هم‌چنین از فرض سوال می‌دانیم :

$$det(A) + det(B) = ۰ \Rightarrow det(A) = -det(B)$$

و یا کمک قسمت الف می‌توان گفت که:

$$det(A)det(B) = -۱$$

پس می‌توان نوشت:

$$det(A + B) = det(A(I + A^T B)) = det(A(B^T B + A^T B)) = det(A(B^T + A^T)B)$$

$$= det(A(B + A)^T B) = det(A)det(B)det(A^T + B^T) = -det(A + B)$$

$$\Rightarrow ۲det(A + B) = ۰ \Rightarrow det(A + B) = ۰$$

۳. در گام نحست بررسی می‌کنیم که فضای ستونی C چیست. به ازای بردار دلخواه v مقدار Cv برابر است با :

$$Cv = ab^T v = a(b^T v) = a < b, v >$$

پس می‌فهمیم که فضای ستونی، برابر است با : $span(a)$.

اکنون می‌خواهیم که بردارهای ویژه را بدست بیاوریم. فرض کنید که v یک بردار ویژه با مقدار ویژه‌ی λ باشد. با توجه به فضای ستونی این نگاشت داریم :

$$Cv = \lambda v =< b, v > a$$

حال اگر v با a هم راستا نباشد، حتما λ و $< b, v >$ باید صفر باشند. زیرا اگر یکی از آنها صفر باشد، صفر بودن دیگری را نتیجه می‌دهد و اگر هر دو ناصفر باشند، دو بردار ناصفر ناهم‌راستا با هم برابر شدند که تناقض است. در این‌صورت می‌فهمیم که v بر b عمود است. درنتیجه v درون یک فضای $n - ۱$ بعدی است. پس می‌توان حداکثر $n - ۱$ بردار ویژه‌ی مستقل خطی از آن انتخاب کرد.

دقت کنیم که اگر C بخواهد قطری پذیر باشد، باید حتما n بردار ویژه داشته باشد. حال به سراغ حالت دوم بردار ویژه می‌رویم. یعنی حالتی که v با a هم راستا باشد.

اگر a بر b عمود باشد، نمی‌توان دیگر n تا بردار ویژه پیدا کرد. زیرا a در فضای عمود بر b قرار دارد و در مورد تعداد ماکسیمم تعداد بردارهای مستقل در آن صحبت کردیم. پس در این صورت دقیقا $n - ۱$ بردار ویژه خواهیم داشت. اما اگر a بر b عمود نباشد، ادعا می‌کنیم که خود a یک بردار ویژه است و به دلیل این که مقدار ویژه‌ی متناظرش ۰ نیست، با $n - ۱$ بردار ویژه‌ی قبلی، یک مجموعه‌ی n تایی از بردارهای مستقل خطی را می‌سازد. اثبات این ادعا ساده است :

$$Ca = ab^T a = a < a, b >=< a, b > a$$

که مقدار ویژه برابر $< a.b >$ است و چون این دو بردار بر هم عمود نیستند، مقدار ویژه ناصفر است.

۴.

$$det \begin{bmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & b-a & b^۲ - a^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & b-a & b^۲ - a^۲ \\ ۰ & c-a & c^۲ - a^۲ \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$(۷)$$

$$= (b-a)(c-a) det \begin{bmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & ۱ & b+a \\ ۰ & ۱ & c+a \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-(b+a)) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

۵. ماتریس Cofactor متناظر با درایه n و n در این مساله به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۶ \end{bmatrix} \quad (۸)$$

به دلیل کم شدن یک واحد از درایه n و n ، به اندازه دترمینان ماتریس cofactor از دترمینان ماتریس اصلی کم میشود.
با توجه به اینکه دترمینان ماتریس cofactor برابر یک است، دترمینان ماتریس نهایی صفر خواهد شد.

۶. • ماتریس B مقدار ویژه صفر دارد در نتیجه singular است و وارون پذیر نیست. همچنین با توجه به اینکه دو مقدار ویژه متمایز غیر صفر دارد، رنک آن برابر ۲ است.

• $det(B) = ۰ \rightarrow det(B^TB) = det(B^T)det(B) = ۰$

• اطلاعات مساله کافی نیست. به عنوان مثال دو ماتریس زیر را درنظر بگیرید:

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & & \\ & ۱ & \\ & & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow B^TB = \begin{bmatrix} ۰ & & \\ & ۱ & \\ & & ۴ \end{bmatrix} \quad (۹)$$

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & \\ & ۱ & \\ & & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow B^TB = \begin{bmatrix} ۰ & & \\ & ۲ & \\ & & ۴ \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

• اگر $p(t)$ یک چند جمله ای باشد و x یک بردار ویژه ماتریس A با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه

$$p(A)x = p(\lambda)x$$

همچنین میدانیم اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، $\frac{۱}{\lambda}$ نیز مقدار ویژه ماتریس $A^{-۱}$ است. در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس $(B^۲ + I)^{-۱}$ برابر $\frac{۱}{۲^۲+۱}, \frac{۱}{۱^۲+۱}, \frac{۱}{۰^۲+۱}$ یا به عبارتی $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۵}$ است.

۷. مقادیر ویژه ماتریس برابر ۱ و ۰/۳− است. حال داریم:

$$(A - \lambda_۱ I)x_۱ = \begin{bmatrix} -۰/۴ & ۰/۹ \\ ۰/۴ & -۰/۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow x_۱ = (۹, ۴). \quad (۱۱)$$

$$(A - \lambda_۲ I)x_۲ = \begin{bmatrix} ۰/۹ & ۰/۹ \\ ۰/۴ & ۰/۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Longrightarrow y = -z \Longrightarrow x_۲ = (۱, -۱). \quad (۱۲)$$

در نتیجه داریم:

$$S = \begin{bmatrix} ۹ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} ۱ & \\ & -۰/۳ \end{bmatrix}, k \rightarrow \infty, \Lambda^k \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & \\ & ۰ \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

در نهایت:

$$S\Lambda^\infty S^{-۱} \longrightarrow \begin{bmatrix} ۹ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & \\ & ۰ \end{bmatrix} \left(\frac{۱}{۱۳}\right) \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۹ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳} \begin{bmatrix} ۹ & ۹ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$